Tentamen Complexe Analyse
03/11/08, 08.30–11.30 uur

1. Definieer voor alle $z \in \mathbb{C}$ met $e^z \neq 1$ de functie

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

(a) Toon aan dat $f(z)$ slechts polen bezit in $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Bepaal de orde van deze polen en hun residu. Wat valt er te zeggen over $z = 0$?

(b) Laat zien dat $f(z)$ samenvalt met een machtreeks om $z = 0$ en bepaal van deze machtreeks de convergentiestraal (zonder die machtreeks expliciet te maken).

De functie $f(z)$ is niet gedefinieerd als $e^z = 1$ ofwel als $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Immers de functie $e^z - 1$ heeft daar 1e orde nulpunten $\left(\frac{d}{dz}(e^z - 1)\Big|_{z=2k\pi i} = 1 \neq 0 \right)$

- Als $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, dan residu gegeven door

$$\lim_{z \to 2k\pi i} (z - 2k\pi i)\left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}\right]$$

$$= \underbrace{\lim_{z \to 2k\pi i} \frac{z - 2k\pi i}{e^z - 1}}_{=1} - \underbrace{\lim_{z \to 2k\pi i} \frac{z - 2k\pi i}{z}}_{=0} = 0$$

NB. $\lim_{z \to 2k\pi i} \frac{z - 2k\pi i}{e^z - 1} = \frac{1}{e^z}\Big|_{z = 2k\pi i} = 1$ (of met l'Hopital)

- Als $z = 0$ dan heffen de polen van $\frac{1}{e^z - 1}$ en van $\frac{1}{z}$ elkaar op:

$$\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} = \frac{1 + z - e^z}{z(e^z - 1)} = \frac{-z^2/2! + \cdots}{z\left(z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right)} \to -\frac{1}{2}, \quad z \to 0$$

(of met l'Hopital $\frac{\frac{d}{dz}(1 + z - e^z)}{\frac{d}{dz}\, z(e^z - 1)} = \frac{1 - e^z}{(z+1)e^z - 1}$

$$\frac{\frac{d}{dz}(1 - e^z)}{\frac{d}{dz}\left((z+1)e^z - 1\right)} = \frac{-e^z}{(z+2)e^z} \to -\frac{1}{2} \text{ als } z \to 0 \,)$$

Dus $f(z)$ bezit ophefbare singulariteit in $z = 0$; door $f(0) = -\frac{1}{2}$ te definieren wordt $f(z)$ analytisch in $z = 0$.

- De zo uitgebreide functie is analytisch behalve in $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

De afstand vanuit $z = 0$ tot de dichtsbijzijnde singulariteit is 2π.

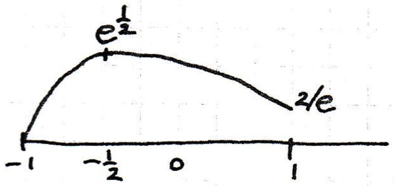
Dus is convergentiestraal van machtreeksontwikkeling rond $z = 0$ gegeven door 2π.

2. Definieer de functie $f(z) = (z+1)\,e^{-z}$, $z \in \mathbb{C}$. Toon aan dat de functie $|f(z)|$ een maximum bezit als $|z| \le 1$ en bepaal dit maximum. Beargumenteer het gevonden resultaat.

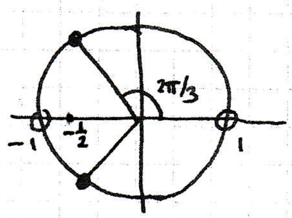
- De functie $f(z) = (z+1)e^{-z}$ is analytisch op $\mathbb{C}$, dus ook continu op $\mathbb{C}$. In ieder geval is $|f(z)|$ continu op $\mathbb{C}$. Daarom bezit $|f(z)|$ op $|z| \le 1$ (begrensde gesloten, dus compacte, verzameling) een maximum. De functie $f(z) = (z+1)e^{-z}$ is niet constant, dus kan het maximum niet in $|z| < 1$ liggen. Conclusie: maximum wordt op $|z| = 1$ aangenomen.

- Als $|z| = 1$, $z = x + iy$, dan $|f(z)| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}\; e^{-x} = \sqrt{2}\,\sqrt{x+1}\; e^{-x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+1}\; e^{-x}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}\right) e^{-x} = \frac{\frac{1}{2} - (x+1)}{\sqrt{x+1}}\, e^{-x} = -\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x+1}}\, e^{-x}$$



Maximum wordt aangenomen in $|z| = 1$, $x = -\frac{1}{2}$ met bedrag $\sqrt{e}$



- Andere parametrizering $|z| = 1$, $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, dan

$$|f(z)|^2 = \left[(\cos\varphi + 1)^2 + \sin^2\varphi\right] e^{-2\cos\varphi} = 2(1 + \cos\varphi)\, e^{-2\cos\varphi}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\,(1 + \cos\varphi)\, e^{-2\cos\varphi} = \left[-\sin\varphi + 2\sin\varphi\,(1 + \cos\varphi)\right] e^{-2\cos\varphi} = \sin\varphi\,(1 + 2\cos\varphi)\, e^{-2\cos\varphi}$$

dus $\frac{d}{d\varphi}[\cdot\cdot] = 0$ als $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, of als $1 + 2\cos\varphi = 0$

$\varphi = 0$: $|f(z)|^2 = 4e^{-2}$; $\varphi = \pi$: $|f(z)|^2 = 0$; $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$: $|f(z)|^2 = e$

NB. $|f(z)| = |(z+1)|\, e^{-\mathrm{Re}\, z} \le (|z| + 1)\, e^{-\mathrm{Re}\, z}$

Als $|z| = 1$ dan $(|z| + 1)e^{-\mathrm{Re}\, z} = 2e^{-\mathrm{Re}\, z}$ is maximaal als $\mathrm{Re}\, z = -1$ dwz. in $z = -1$. Echter voor $f(z)$ geldt $f(-1) = 0$.

3. Bereken met behulp van residuenrekening de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\sin\theta}\, d\theta.$$

Geef duidelijk aan van welke substituties gebruik gemaakt wordt.

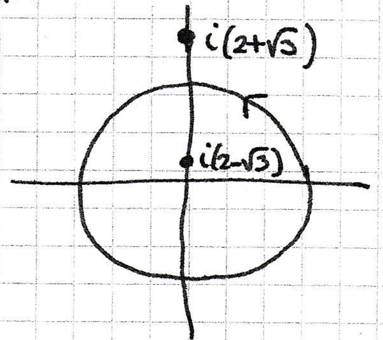
- $-1 \leq \sin\theta \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin\theta \leq 1 \Rightarrow \quad 1 \leq 2-\sin\theta \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\sin\theta} \leq 1$

  $\Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin\theta}$ goed gedefinieerd als reëel getal

- Substitueer $z = e^{i\theta}$, $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(z-\dfrac{1}{z}\right)$, $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$, $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\sin\theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2-\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz} = \int_{|z|=1} \frac{1}{2iz-\frac{1}{2}(z^2-1)}\,dz$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{-2}{z^2-4iz+1}\,dz$$



- Polen in $z = i(2 \pm \sqrt{3})$ eerste orde

dus $\displaystyle -2\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-4iz+1}$

$$= (-2)\,2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i(2-\sqrt{3})} \frac{1}{z^2-4iz+1} = (-2)(2\pi i)\cdot \left.\frac{1}{2z-4i}\right|_{z=i(2-\sqrt{3})}$$

$$= (-2)(2\pi i)\frac{1}{-2i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

- Berekening residu via breuksplitsing:

$$\frac{1}{z^2-4iz+1} = \frac{1}{\left(z-i(2-\sqrt{3})\right)\left(z-i(2+\sqrt{3})\right)} = \frac{1}{-2i\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-i(2-\sqrt{3})} - \frac{1}{z-i(2+\sqrt{3})}\right)$$

- Via $t = \tan\frac{1}{2}\theta$ $\quad \sin\theta = \dfrac{2t}{t^2+1}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad \theta = 2\arctan t$ $\quad d\theta = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2-\sin\theta}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2-\sin\theta}\,d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2-\frac{2t}{t^2+1}}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2-t+1}\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt \;\underset{du=dt}{\overset{u=t-\frac{1}{2}}{=}}\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2+(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2}\,du \;\underset{du=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,ds}{\overset{u=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,s}{=}}\; \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{s^2+1}$$

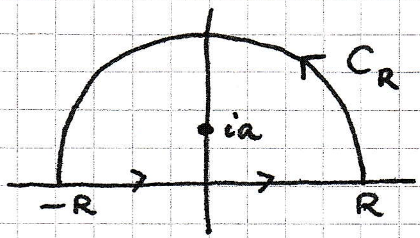
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

4. Bereken met behulp van residuenrekening de integraal

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx, \quad a>0.$$

Beargumenteer de keuze van de gebruikte contourintegraal.

- Beschouw $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$ $\quad$ 2^e orde polen in $z = \pm ia$



$R>a \qquad |e^{iz}| = e^{-y} \leq 1 \qquad y \geq 0$

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-a^2)^2} \to 0 \text{ als } R\to\infty$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx + i\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{(x^2+a^2)^2}\,dx}_{=0}$$

Er geldt:

$R>a$:

$$\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx}_{=\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx} + \underbrace{\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}\,dz}_{\to 0} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} f(z)$$

- $$\operatorname{Res}_{z=ia} f(z) = \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}(z-ia)^2 \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2} = \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+ia)^2}$$

$$= \lim_{z\to ia} \frac{ie^{iz}(z+ia)^2 - 2(z+ia)e^{iz}}{(z+ia)^4} = \lim_{z\to ia} \frac{ie^{iz}(z+ia) - 2e^{iz}}{(z+ia)^3}$$

$$\rightarrow \qquad \operatorname{Res}_{z=ia} f(z) = \frac{e^{-a}(-2a-2)}{-ia^3\,8}$$

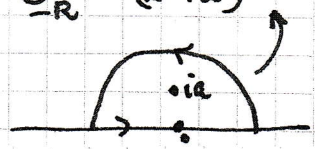
- $$\Rightarrow \quad \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}(-2a-2)}{-ia^3\,8} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-a}(a+1)}{a^3}$$

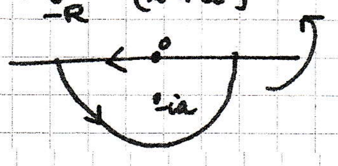
- Of als:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \operatorname{Re} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$

- Of als:

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix}}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$





- Of als:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} = 2\pi i \cdot \frac{e^{-a}}{2ia} = \pi\frac{e^{-a}}{a} \quad \text{(ga na)}$$

differentiatie (onder integraal-teken) naar a :

$$-2a\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \pi\,\frac{-e^{-a}\cdot a - e^{-a}}{a^2} = -\pi\,\frac{e^{-a}(a+1)}{a^2}$$

5. Definieer de 2π-periodieke reële functie $F(t)$ door

$$F(t) = 0, \quad -\pi < t \le 0; \quad F(t) = \pi, \quad 0 < t \le \pi.$$

(a) Bepaal de bijbehorende complexe Fourier-coefficiënten

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

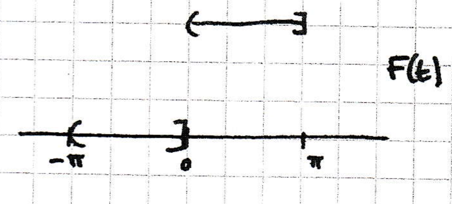
(b) Wat levert de gelijkheid van Parseval op?

(c) Bepaal voor iedere $t \in [-\pi, \pi]$ de som van de reeks

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}.$$

Beargumenteer het resultaat.

(d) Schrijf de complexe Fourierreeks in reële vorm met behulp van sinus en cosinus functies.

- 

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\pi \int_0^{\pi} e^{-int}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-int}\, dt$$

$c_0 = \frac{\pi}{2}$; $\quad n \neq 0 \Rightarrow c_n = \frac{1}{2}\cdot \frac{e^{-int}}{-in}\Big|_{t=0}^{\pi} = \frac{1}{2in}\left(1-(-1)^n\right)$

$c_n = 0 \quad n$ even $\qquad c_n = \frac{1}{in} \quad n$ oneven

- Parseval $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |F(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\pi^2\,dt = \frac{\pi^3}{2\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}$$

$$\left.\right\} \quad \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- $$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = \begin{cases} F(t) & -\pi<t<0,\ 0<t<\pi \\ \frac{\pi}{2} & t=-\pi,\ t=0,\ t=\pi \end{cases}$$

- $$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} = c_0 + {\sum_{n=-N}^{N}}' c_n e^{int} = c_0 + {\sum_{n=-N}^{N}}' c_n(\cos nt + i\sin nt)$$

$$= c_0 + \underbrace{{\sum_{n=-N}^{N}}' \frac{1}{2in}\left(1-(-1)^n\right)\cos nt}_{=0} + {\sum_{n=-N}^{N}}' \frac{i}{2in}\left(1-(-1)^n\right)\sin nt$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} = \frac{\pi}{4} + 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)t}{2m+1}$$

NB. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{\text{odd}}\frac{1}{n^2} + \sum_{\text{even}}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ (ga na!)

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$$